

最佳四进阵列偶构造方法研究

许成谦, 彭秀平

(燕山大学信息科学与工程学院, 河北秦皇岛 066004)

摘要: 本文给出了三种构造最佳四进阵列偶的方法, 其中包括采用周期互补二进阵列偶直接构造最佳四进阵列偶的方法, 由最佳四进阵列偶和准最佳阵列偶交替递归构造最佳四进阵列偶的方法, 采用几乎最佳四进阵列偶与最佳四进阵列偶递归构造最佳四进阵列偶的方法。

关键词: 信号设计; 阵列; 阵列偶; 最佳四进阵列偶

中图分类号: TN911.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 01-0006-07

A Study on the Methods for Constructing Perfect Quaternary Array Pairs

XU Cheng-qian, PENG Xiu-ping

(College of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)

Abstract: Three kinds of methods for constructing perfect quaternary array pairs are presented. They are the methods of constructing directly quaternary array pairs with the periodic complementary binary array pairs, the interleaving recursive construction with perfect quaternary array pairs and quasi-perfect array pairs and the recursive construction with almost perfect quaternary array pairs and perfect quaternary array pairs.

Key words: Signal design; array; array pairs; perfect quaternary array pairs

1 引言

最佳二进阵列^[1]是一种性能很好的伪噪声阵列, 但最佳二进阵列的存在空间是非常有限, 仅存在体积为 $4t^2$ (t 为整数) 的阵列, 即存在空间为 4, 16, 36, 64, ...。尽管最佳二进阵列具有良好的相关特性, 但由于其条件的限制, 使其在工程应用中受到了很大的限制。为扩大其应用空间范围, 人们先后提出了最佳三元阵列^[2]、最佳四元阵列^[3]、几乎最佳四相阵列^[4]等。在判定上述这些码的最佳性时使用的自相关函数是用阵列与自身延迟阵列的内积来表示的, 这大大限制了最佳码的存在空间, 为了克服这一限制, 人们又提出了失配阵列^[5]的概念, 在此基础上, 人们又先后提出了最佳二进阵列偶^[6]、最佳屏蔽二进阵列偶^[7]、最佳互补序列偶^[8]等。阵列偶中两个阵列的互相关函数定义为这个阵列偶的自相关函数, 并以此来表征阵列偶的最佳循环相关特性。由于阵列偶同样也是具有良好周期相关特性的离散信号, 因而可以广泛应用于通信、雷达、导航、信号处理等系统中, 其方法是在系统中任选阵列偶中的一个阵列作为传输信号而用阵列偶中的另一阵列作为接收机的本地阵列, 通过计算阵列偶的自相关函数来达到提取信息的目的。

怎样来获得最佳阵列偶, 对于进制少和体积小的最佳阵列偶, 可以通过计算机搜索的方法得到, 但是计算机搜索方法的搜索数量的增长趋势将随着阵列偶的体积以及阵列进制增多呈 n^{2V} (n 为阵列偶进制数、 V 为阵列偶的体积) 形式, 所以随着阵列偶进制的增加以及阵列偶的体积的增大, 通过计算机搜索得到最佳阵列偶的方法就显得不适合。为了进一步扩大最佳离散信号的存在空间和获得更多的最佳离散信号, 本文提出了最佳四进阵列偶的概念, 并对最佳四进阵列偶的构造方法做了重点研究, 提出了利用周期互补二进阵列偶直接构造最佳四进阵列偶、利用准最佳阵列偶和最佳四进阵列偶的交替递归构造法得到高阶的最佳四进阵列偶和利用几乎最佳四进阵列偶和最佳四进阵列偶的递归构造法得到高阶的最佳四进阵列偶等方法, 这样就为工程应用提供了更多的最佳离散信号选择范围。

2 基本定义及性质

为了便于本文的描述, 先做如下说明, 四进阵列偶中的元素的取值集合为 $\{+1, +i, -1, -i\}$, 其中 $i = \sqrt{-1}$ 。在本文中, 为了书写的方便, 用 0, 1, 2, 3 分别代表 1, i , -1 , $-i$ 。

定义 1 设 $X = [x(j_0, j_1, \dots, j_{r-1})]$ 和 $Y = [y(j_0, j_1, \dots, j_{r-1})]$ 是两个 $N_0 \times N_1 \times \dots \times N_{r-1}$ 阶阵列, 且 $(x(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}))^4 = 1, (y(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}))^4 = 1$. 若阵列偶 (X, Y) 的自相关函数满足:

$$\begin{aligned} R_{(X,Y)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) &= \sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} x(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) \\ &\quad \cdot \bar{y}(j_0 + u_0, j_1 + u_1, \dots, j_{r-1} + u_{r-1}) \\ &= \begin{cases} F, (u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) = (0, 0, \dots, 0) \\ 0, (u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) \neq (0, 0, \dots, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

式中, \bar{y} 表示 y 的共轭, $j_k + u_k = (j_k + u_k) \bmod N_k, k = 0, 1, \dots, r-1$, 则称阵列偶 (X, Y) 为最佳四进阵列偶 (Perfect Quaternary Array Pair), 记作 $PQAP_{(X,Y)}(N_0, N_1, \dots, N_{r-1})$. F 为最佳四进阵列偶 (X, Y) 的峰值, F 为常数.

定义 2^[8] 设 $X = [x(j_0, j_1, \dots, j_{r-1})]$ 和 $Y = [y(j_0, j_1, \dots, j_{r-1})]$ 是两个 r 维的 $N_0 \times N_1 \times \dots \times N_{r-1}$ 阶阵列, 其中, $0 \leq j_k \leq N_k - 1, (0 \leq k \leq r-1)$, 且阵列 X 和 Y 中元素的取值为 ± 1 , 则称 X 和 Y 为一个 r 维二进阵列偶, 此阵列偶的自相关函数定义为

$$\begin{aligned} R_{(X,Y)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) &= \sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} x(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) \\ &\quad \cdot y(j_0 + u_0, j_1 + u_1, \dots, j_{r-1} + u_{r-1}) \end{aligned}$$

其中, $j_k + u_k = (j_k + u_k) \bmod N_k, k = 0, 1, \dots, r-1$.

定义 3^[8] 设 $\{(X_k, Y_k) | 0 \leq k \leq Q-1\}$ 是由 Q 个 $N_0 \times N_1 \times \dots \times N_{r-1}$ 阶二进阵列偶组成的阵列偶族, 若满足

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{Q-1} R_{(X_k, Y_k)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) &= \begin{cases} F, (u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) = (0, 0, \dots, 0) \\ 0, (u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) \neq (0, 0, \dots, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

则称 $\{(X_k, Y_k) | 0 \leq k \leq Q-1\}$ 为周期互补二元阵列偶. 其中, F 称为主峰.

定义 4 设 (X, Y) 是 r 维 $N_0 \times N_1 \times \dots \times N_{r-1}$ 阶四进阵列偶, 将其构成为另一阵列偶 (X_1, Y_1) 是 r 维 $2N_0 \times N_1 \times \dots \times N_{r-1}$ 阶四进阵列偶, 其中,

$$x_1(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) = (-1)^{\lfloor j_0/N_0 \rfloor} x(\lfloor j_0/N_0 \rfloor, j_1, \dots, j_{r-1}),$$

$$y_1(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) = (-1)^{\lfloor j_0/N_0 \rfloor} y(\lfloor j_0/N_0 \rfloor, j_1, \dots, j_{r-1}),$$

$\lfloor j_0/N_0 \rfloor$ 表示取整, $\lfloor j_0/N_0 \rfloor = j_0 \bmod N_0$. 若阵列偶 (X_1, Y_1) 的自相关函数 $R_{(X_1, Y_1)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1})$ 满足如下条件:

$$\begin{aligned} R_{(X_1, Y_1)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) &= \begin{cases} F \neq 0, (u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) = (0, 0, \dots, 0) \\ -F \neq 0, (u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) = (N_0, 0, \dots, 0) \\ 0, (u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) = \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

其中, $0 \leq j_0 \leq 2N_0 - 1, 0 \leq j_i \leq N_i - 1, 0 \leq u_0 \leq 2N_0 - 1, 0 \leq u_i \leq N_i - 1, j_0 + u_0 \equiv (j_0 + u_0) \bmod 2N_0, j_i + u_i \equiv (j_i + u_i) \bmod N_i, (1 \leq i \leq r-1)$, 则称 (X, Y) 为准最佳四进阵列偶.

定义 5 设 (X, Y) 是 r 维 $2N_0 \times N_1 \times \dots \times N_{r-1}$ 阶四进阵列偶, 若阵列偶 (X, Y) 的自相关函数 $R_{(X,Y)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1})$ 满足如下条件:

$$\begin{aligned} R_{(X,Y)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) &= \begin{cases} F \neq 0, (u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) = (0, 0, \dots, 0) \\ -F \neq 0, (u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) = (N_0, 0, \dots, 0) \\ 0, (u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) = \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

其中, $0 \leq j_0 \leq 2N_0 - 1, 0 \leq j_i \leq N_i - 1, 0 \leq u_0 \leq 2N_0 - 1, 0 \leq u_i \leq N_i - 1, j_0 + u_0 \equiv (j_0 + u_0) \bmod 2N_0, j_i + u_i \equiv (j_i + u_i) \bmod N_i, (1 \leq i \leq r-1)$, 则称 (X, Y) 为几乎最佳四进阵列偶 (Almost Perfect Quaternary Array Pair), 记作

$$APQAP_{(X,Y)}(N_0, N_1, \dots, N_{r-1}).$$

3 四进阵列偶的特征多项式的性质

设 r 维 $N_0 \times N_1 \times \dots \times N_{r-1}$ 阶阵列 X 的特征多项式为:

$$\begin{aligned} P_X(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) &= \sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} X(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) x_0^{j_0} x_1^{j_1} \dots x_{r-1}^{j_{r-1}} \end{aligned}$$

定理 1 若存在 $PQAP_{(X,Y)}(N_0, N_1, \dots, N_{r-1})$, 其峰值为 F , 当且仅当

$$\begin{aligned} P_X(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) P_Y(x_0^{-1}, x_1^{-1}, \dots, x_{r-1}^{-1}) &= F, \\ (\bmod x_0^0 - 1, x_1^0 - 1, \dots, x_{r-1}^0 - 1) \end{aligned}$$

其中 $P_X(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}), P_Y(x_0, x_1, \dots, x_{r-1})$ 分别为 X 和 Y 的特征多项式.

证明 由存在 $PQAP_{(X,Y)}(N_0, N_1, \dots, N_{r-1})$, 则有

$$\sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} x(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) \bar{y}(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) = F$$

当且仅当 $(u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ 时

$$\begin{aligned} \sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} x(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) \\ \cdot \bar{y}(j_0 + u_0, j_1 + u_1, \dots, j_{r-1} + u_{r-1}) = 0 \end{aligned}$$

所以在 $(\bmod x_0^0 - 1, x_1^0 - 1, \dots, x_{r-1}^0 - 1)$ 条件下, 有

$$\begin{aligned} P_X(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) P_Y(x_0^{-1}, x_1^{-1}, \dots, x_{r-1}^{-1}) &= \sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} X(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) x_0^{j_0} x_1^{j_1} \dots x_{r-1}^{j_{r-1}} \\ &= \sum_{l_0=0}^{N_0-1} \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{l_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} \bar{Y}(l_0, l_1, \dots, l_{r-1}) x_0^{-l_0} x_1^{-l_1} \dots x_{r-1}^{-l_{r-1}} \\ &= \sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} \sum_{l_0=0}^{N_0-1} \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{l_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} X(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) \\ &\quad \bar{Y}(l_0, l_1, \dots, l_{r-1}) x_0^{j_0-l_0} x_1^{j_1-l_1} \dots x_{r-1}^{j_{r-1}-l_{r-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\equiv \sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} X(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) \bar{Y}(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) \\ &+ \sum_{t_0=1}^{N_0-1} \sum_{t_1=1}^{N_1-1} \cdots \sum_{t_{r-1}=1}^{N_{r-1}-1} \sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} X(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) \\ &\quad \cdot \bar{Y}(j_0 + t_0, j_1 + t_1, \dots, j_{r-1} + t_{r-1}) x_0^{t_0} x_1^{t_1} \cdots x_{r-1}^{t_{r-1}} \\ &\equiv F \end{aligned}$$

定理 2 若存在 $APQAP_{(X,Y)}(2N_0, N_1, \dots, N_{r-1})$, 其峰值为 F , 当且仅当:

$$\begin{aligned} &P_X(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) P_Y(x_0^{-1}, x_1^{-1}, \dots, x_{r-1}^{-1}) \\ &= F(1 - x_0^{N_0}), (\text{mod } x_0^{2N_0} - 1, x_1^{N_1} - 1, \dots, x_r^{N_r} - 1) \end{aligned}$$

其中 $P_X(x_0, x_1, \dots, x_{r-1})$ 、 $P_Y(x_0, x_1, \dots, x_{r-1})$ 分别为 X 和 Y 的特征多项式.

证明 由于存在 $APQAP_{(X,Y)}(2N_0, N_1, \dots, N_{r-1})$, 有

$$\begin{aligned} &\sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} X(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) \bar{Y}(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) = F \\ &\sum_{j_0=N_0}^{2N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} X(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) \bar{Y}(j_0 + N_0, j_1, \dots, j_{r-1}) \\ &= -F \end{aligned}$$

当且仅当 $(u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ 和 $(N_0, 0, \dots, 0)$ 时

$$\begin{aligned} &\sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} x(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) \bar{y}(j_0 + u_0, j_1 + u_1, \dots, j_{r-1} \\ &+ u_{r-1}) = 0 \end{aligned}$$

所以在 $(\text{mod } x_0^{2N_0} - 1, x_1^{N_1} - 1, \dots, x_r^{N_r} - 1)$ 条件下, 有

$$\begin{aligned} &P_X(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) P_Y(x_0^{-1}, x_1^{-1}, \dots, x_{r-1}^{-1}) \\ &\equiv \sum_{j_0=0}^{2N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} X(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) x_0^{j_0} x_1^{j_1} \cdots x_{r-1}^{j_{r-1}} \\ &\quad \cdot \sum_{l_0=0}^{2N_0-1} \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{l_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} \bar{Y}(l_0, l_1, \dots, l_{r-1}) x_0^{-l_0} x_1^{-l_1} \cdots x_{r-1}^{-l_{r-1}} \\ &\equiv \sum_{j_0=0}^{2N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} \sum_{l_0=0}^{2N_0-1} \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{l_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} X(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) \\ &\quad \cdot \bar{Y}(l_0, l_1, \dots, l_{r-1}) x_0^{j_0-l_0} x_1^{j_1-l_1} \cdots x_{r-1}^{j_{r-1}-l_{r-1}} \\ &\equiv \sum_{j_0=0}^{2N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} X(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) \bar{Y}(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) \\ &\quad + \sum_{j_0=N_0}^{2N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} X(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) \\ &\quad \cdot \bar{Y}(j_0 + N_0, j_1, \dots, j_{r-1}) x_0^{N_0} \\ &\quad + \sum_{t_0=1}^{2N_0-1} \sum_{t_1=1}^{N_1-1} \cdots \sum_{t_{r-1}=1}^{N_{r-1}-1} \sum_{j_0=0}^{2N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} X(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) \\ &\quad \cdot \bar{Y}(j_0 + t_0, j_1 + t_1, \dots, j_{r-1} + t_{r-1}) x_0^{t_0} x_1^{t_1} \cdots x_{r-1}^{t_{r-1}} \\ &\equiv F(1 - x_0^{N_0}) \end{aligned}$$

4 最佳四进阵列偶的构造

4.1 基于周期互补二进阵列偶的构造方法

定理 3 设存在两个 r 维 $N_0 \times N_1 \times \cdots \times N_{r-1}$ 阶周

期互补二进阵列偶 $\{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)\}$, 峰值为 F , 且 $R_{(X_1, X_2)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) = R_{(Y_1, Y_2)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1})$, 则存在一个 r 维 $N_0 \times N_1 \times \cdots \times N_{r-1}$ 阶最佳四进阵列偶 (X, Y) .

证明 令

$$X = (1+i) \frac{X_1}{2} + (1-i) \frac{Y_2}{2}, Y = (1+i) \frac{X_2}{2} + (1-i) \frac{Y_1}{2}$$

则阵列偶 (X, Y) 的自相关函数为

$$\begin{aligned} &R_{(X,Y)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) \\ &= \sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} x(j_0, j_1, \dots, j_{r-1}) \\ &\quad \cdot \bar{y}(j_0 + u_0, j_1 + u_1, \dots, j_{r-1} + u_{r-1}) \\ &= \sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{j_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} [(1+i) \frac{x_1(j_0, j_1, \dots, j_{r-1})}{2} \\ &\quad + (1-i) \frac{\bar{y}_2(j_0, j_1, \dots, j_{r-1})}{2}] \\ &\quad \cdot [(1+i) \frac{x_2(j_0 + u_0, j_1 + u_1, \dots, j_{r-1} + u_{r-1})}{2} \\ &\quad + (1-i) \frac{\bar{y}_1(j_0 + u_0, j_1 + u_1, \dots, j_{r-1} + u_{r-1})}{2}] \\ &= \frac{i}{2} R_{(X_1, X_2)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) \\ &\quad - \frac{i}{2} R_{(Y_1, Y_2)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} R_{(X_1, Y_1)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} R_{(X_2, Y_2)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) \end{aligned}$$

由 $R_{(X_1, X_2)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) = R_{(Y_1, Y_2)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1})$,

则 $R_{(X,Y)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) = \frac{1}{2} R_{(X_1, Y_1)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) + \frac{1}{2} R_{(X_2, Y_2)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1})$

又因为 $\{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)\}$ 是周期互补二进阵列偶, 所以

$$\begin{aligned} &R_{(X,Y)}(u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) \\ &= \begin{cases} \frac{F}{2}, & (u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) = (0, 0, \dots, 0) \\ 0, & (u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) \neq (0, 0, \dots, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

很显然, (X, Y) 是最佳四进阵列偶.

例 1 已知有两个 2×4 阶的周期互补二进阵列偶为

$$\left\{ \left(X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Y_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right), \right. \\ \left. \left(X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

通过定理 3 的构造方法得到的最佳四进阵列偶为:

$$\left(X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

为了叙述的方便, 下面的这些构造方法是以二维

阵列偶为例,对于高维的可以采用类似的方法去推广.

4.2 基于准最佳阵列偶的构造方法

首先,介绍交替构造法.

定义 6 设阵列偶 (X_1, Y_1) 和 (X_2, Y_2) 的阶数都为 $N_0 \times N_1$,阵列偶 (X, Y) 是由阵列偶 (X_1, Y_1) 和 (X_2, Y_2) 构成,其构造方法是阵列偶 (X, Y) 中的阵列 X 的每列都由阵列 X_1 和 X_2 和的每列交替构成, Y 的每列都由阵列 Y_1 和 Y_2 和的每列交替构成,阵列偶 (X, Y) 的阶数为 $2N_0 \times 2N_1$,即:

$$x(j_0, j_1) = \begin{cases} x'_1(j_0, [\frac{j_1}{2}]), & \text{当 } j_1 \text{ 为奇数时} \\ x'_2(j_0, [\frac{j_1}{2}]), & \text{当 } j_1 \text{ 为偶数时} \end{cases}$$

$$x'_1(j_0, j_1) = x_1([j_0 - N_0]_{N_0}, j_1),$$

$$x'_2(j_0, j_1) = x_2([j_0 - N_0]_{N_0}, j_1)$$

$$y(j_0, j_1) = \begin{cases} y'_1(j_0, [\frac{j_1}{2}]), & \text{当 } j_1 \text{ 为奇数时} \\ y'_2(j_0, [\frac{j_1}{2}]), & \text{当 } j_1 \text{ 为偶数时} \end{cases}$$

$$y'_1(j_0, j_1) = y_1([j_0 - N_0]_{N_0}, j_1), y'_2(j_0, j_1) = y_2([j_0 - N_0]_{N_0}, j_1)$$

其中: $[\frac{j_1}{2}]$ 表示取整, $[j_0 - N_0]_{N_0} = (j_0 - N_0) \bmod N_0, 0 \leq j_0 \leq 2N_0 - 1$,则称阵列偶 (X, Y) 是由阵列偶 (X_1, Y_1) 和阵列偶 (X_2, Y_2) 交替构造法得到.

定理 4 设阵列偶 (X_1, Y_1) 是二维 $N_0 \times N_1$ 阶最佳四进阵列偶,峰值为 F_1 ,阵列偶 (X_2, Y_2) 是与阵列偶 (X_1, Y_1) 阶数相同的准最佳四进阵列偶,峰值为 F_2 ,且 $F_1 = F_2$,若阵列偶 (X, Y) 是由阵列偶 (X_1, Y_1) 和 (X_2, Y_2) 交替构造得到,则阵列偶 (X, Y) 为二维 $2N_0 \times 2N_1$ 阶最佳四进制阵列偶,峰值为 $4F_1$.

证明 阵列偶 (X, Y) 的自相关函数为:

$$R_{(X, Y)}(n, m) = \sum_{j_0=0}^{2N_0-1} \sum_{j_1=0}^{2N_1-1} x(j_0, j_1) \bar{y}(j_0 + n, j_1 + m)$$

当 $m \equiv 0 \pmod{2}$ 时

$$\begin{aligned} R_{(X, Y)}(n, m) &= \sum_{j_0=0}^{2N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} x'_1(j_0, j_1) \bar{y}'_1(j_0 + n, j_1 + m) \\ &\quad + \sum_{j_0=0}^{2N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} x'_2(j_0, j_1) \bar{y}'_2(j_0 + n, j_1 + m) \\ &= 2R_{(X_1, Y_1)}(n, m) + 2R_{(X_2, Y_2)}(n, m) \\ &= \begin{cases} 2F_1 + 2F_2, & \text{当 } n=0 \text{ 和 } m=0 \text{ 时} \\ 2F_1 - 2F_2 = 0, & \text{当 } n=N_0 \text{ 和 } m=0 \text{ 时} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

当 $m \not\equiv 0 \pmod{2}$ 时

$$R_{(X, Y)}(n, m) = \sum_{j_0=0}^{2N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} x'_1(j_0, j_1) \bar{y}'_2(j_0 + n, j_1 + [m/2])$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{j_0=0}^{2N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} x'_2(j_0, j_1) \bar{y}'_1(j_0 + n, j_1 + [m/2] + 1) \\ &= R_{(X_1, Y_2)}(n, [m/2]) - R_{(X_1, Y_2)}(n, [m/2]) \\ &\quad + R_{(X_2, Y_1)}(n, [m/2] + 1) - R_{(X_2, Y_1)}(n, [m/2] + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

证毕.

例 2 已知有 $PQAP_{(X_1, Y_1)}(6, 2)$ 和 6×2 阶的准最佳四进阵列偶 (X_2, Y_2) ,它们的峰值都等于 4,它们分别为:

$$\begin{pmatrix} X_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, Y_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

根据定理 4,得到的 $PQAP_{(X, Y)}(12, 4)$ (峰值为 16)如下:

$$\begin{pmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

若将定理 4 中的 (X_2, Y_2) 变成二进制的阵列偶,结论同样成立,结论如下:

定理 5 设阵列偶 (X_1, Y_1) 是二维 $N_0 \times N_1$ 阶最佳四进阵列偶,峰值为 F_1 ,阵列偶 (X_2, Y_2) 是与阵列偶 (X_1, Y_1) 阶数相同的准最佳二进阵列偶,峰值为 F_2 ,且 $F_1 = F_2$,若阵列偶 (X, Y) 是由阵列偶 (X_1, Y_1) 和 (X_2, Y_2) 交替构造得到,则阵列偶 (X, Y) 为二维 $2N_0 \times 2N_1$ 阶最佳四进制阵列偶,峰值为 $4F_1$.

证明 该定理的证明方法同定理 4 的证明方法类似,在此省略.

例 3 已知有 $PQAP_{(X_1, Y_1)}(1, 8)$ 和 1×8 阶的准最佳二进阵列偶 (X_2, Y_2) ,它们分别为

$$\begin{pmatrix} X_1 = [0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2] \\ Y_1 = [0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 = [0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2] \\ Y_2 = [0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2] \end{pmatrix}$$

按照定理 5 的构造方法得到的 $PQAP_{(X, Y)}(2, 16)$ 为:

$$\begin{pmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \\ Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

推论 1 设阵列偶 (X_1, Y_1) 是二维 $N_0 \times N_1$ 阶最佳

四进阵列偶, 峰值为 F_1 , 阵列 X_2 是与阵列偶 (X_1, Y_1) 阶数相同的准最佳二进阵列, 峰值为 F_2 , 且 $F_1 = 2F_2$, 阵列偶 (X, Y) 是由阵列偶 (X_1, Y_1) 和阵列 X_2 交替构造得到, 则阵列偶 (X, Y) 为二维 $2N_0 \times 2N_1$ 阶最佳四进制阵列偶, 其峰值为 $4F_1$.

推论 1 很容易由定理 5 得到证明.

4.3 基于几乎最佳四进阵列偶的构造

引理 1^[3] 如果系数为复数的多项式满足关系式:

$$P(x_0, x_1) \bar{P}(x_0^{-1}, x_1^{-1}) \equiv 0 \pmod{x_0^{N_0} - 1, x_1^{N_1} - 1}$$

则 $P(x_0, x_1) \equiv 0 \pmod{x_0^{N_0} - 1, x_1^{N_1} - 1}$.

定理 6 设阵列偶 (X_1, Y_1) 是二维 $2N_0 \times N_1$ 阶几乎最佳四进阵列偶, (X_2, Y_2) 是 $N_0 \times N_1$ 阶最佳四进阵列偶, 它们的峰值分别为 F_1, F_2 , 且 $F_1 = 2F_2$, 则存在 $4N_0 \times N_1$ 阶和 $2N_0 \times 2N_1$ 阶的最佳四进阵列偶 (X, Y) 和 (X', Y') .

证明 由于 (X_1, Y_1) 是二维 $2N_0 \times N_1$ 阶几乎最佳四进阵列偶, (X_2, Y_2) 是 $N_0 \times N_1$ 阶最佳四进阵列偶, 则它们的特征多项式

$$P_{X_1}(x_0, x_1) = \sum_{j_0=0}^{2N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} x_1(j_0, j_1) x_0^{j_0} x_1^{j_1}$$

$$P_{Y_1}(x_0, x_1) = \sum_{j_0=0}^{2N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} y_1(j_0, j_1) x_0^{j_0} x_1^{j_1}$$

$$P_{X_2}(x_0, x_1) = \sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} x_2(j_0, j_1) x_0^{j_0} x_1^{j_1}$$

$$P_{Y_2}(x_0, x_1) = \sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} y_2(j_0, j_1) x_0^{j_0} x_1^{j_1}$$

满足

$$P_{X_1}(x_0, x_1) \bar{P}_{Y_1}(x_0^{-1}, x_1^{-1}) \equiv F_1(1 - x_0^{N_0})$$

$$\pmod{x_0^{2N_0} - 1, x_1^{N_1} - 1}$$

$$P_{X_2}(x_0, x_1) \bar{P}_{Y_2}(x_0^{-1}, x_1^{-1}) \equiv F_2 \pmod{x_0^{N_0} - 1, x_1^{N_1} - 1}$$

令
$$P_{X_3}(x_0, x_1) = (1 + x_0^{N_0}) P_{X_2}(x_0, x_1)$$

$$P_{Y_3}(x_0, x_1) = (1 + x_0^{N_0}) P_{Y_2}(x_0, x_1)$$

则

$$P_{X_3}(x_0, x_1) \bar{P}_{Y_3}(x_0^{-1}, x_1^{-1})$$

$$\equiv 2(1 + x_0^{N_0}) P_{X_2}(x_0, x_1) \bar{P}_{Y_2}(x_0^{-1}, x_1^{-1})$$

$$\equiv 2F_2(1 + x_0^{N_0}) \pmod{x_0^{2N_0} - 1, x_1^{N_1} - 1}$$

因为这些特征多项式的系数都是 $x^4 - 1 = 0$ 的根,

所以有

$$P_{X_1}(x_0, x_1) \bar{P}_{Y_1}(x_0^{-1}, x_1^{-1}) P_{X_3}(x_0, x_1) \bar{P}_{Y_3}(x_0^{-1}, x_1^{-1})$$

$$\equiv 2F_1 F_2 (1 - x_0^{N_0})(1 + x_0^{N_0})$$

$$\equiv 0, \pmod{x_0^{2N_0} - 1, x_1^{N_1} - 1}$$

由引理 1 得到

$$P_{X_1}(x_0, x_1) \bar{P}_{Y_3}(x_0^{-1}, x_1^{-1}) \equiv 0 \pmod{x_0^{2N_0} - 1, x_1^{N_1} - 1}$$

$$P_{X_3}(x_0, x_1) \bar{P}_{Y_1}(x_0^{-1}, x_1^{-1}) \equiv 0 \pmod{x_0^{2N_0} - 1, x_1^{N_1} - 1}$$

现在定义的特征多项式如下

$$P_X(x_0, x_1) = P_{X_1}(x_0^2, x_1) + x_0 P_{X_3}(x_0^2, x_1)$$

$$P_Y(x_0, x_1) = P_{Y_1}(x_0^2, x_1) + x_0 P_{Y_3}(x_0^2, x_1)$$

$$P_{X'}(x_0, x_1) = P_{X_1}(x_0, x_1^2) + x_1 P_{X_3}(x_0, x_1^2)$$

$$P_{Y'}(x_0, x_1) = P_{Y_1}(x_0, x_1^2) + x_1 P_{Y_3}(x_0, x_1^2)$$

所以,

$$P_X(x_0, x_1) \bar{P}_Y(x_0^{-1}, x_1^{-1})$$

$$= P_{X_1}(x_0^2, x_1) \bar{P}_{Y_1}(x_0^{-2}, x_1^{-1}) + P_{X_3}(x_0^2, x_1) \bar{P}_{Y_3}(x_0^{-2}, x_1^{-1})$$

$$+ x_0 P_{X_3}(x_0^2, x_1) \bar{P}_{Y_1}(x_0^{-2}, x_1^{-1})$$

$$+ x_0^{-1} P_{X_1}(x_0^2, x_1) \bar{P}_{Y_3}(x_0^{-2}, x_1^{-1})$$

$$= P_{X_1}(x_0^2, x_1) \bar{P}_{Y_1}(x_0^{-2}, x_1^{-1}) + P_{X_3}(x_0^2, x_1) \bar{P}_{Y_3}(x_0^{-2}, x_1^{-1})$$

$$= F_1(1 - x_0^{2N_0}) + 2F_2(1 + x_0^{2N_0})$$

因为 $F_1 = 2F_2$, 所以

$$P_X(x_0, x_1) \bar{P}_Y(x_0^{-1}, x_1^{-1}) = F_1 + 2F_2$$

同理可以计算得到:

$$P_{X'}(x_0, x_1) \bar{P}_{Y'}(x_0^{-1}, x_1^{-1})$$

$$= P_{X_1}(x_0, x_1^2) \bar{P}_{Y_1}(x_0, x_1^{-2}) + P_{X_3}(x_0, x_1^2) \bar{P}_{Y_3}(x_0, x_1^{-2})$$

$$= F_1(1 - x_0^{N_0}) + 2F_2(1 + x_0^{N_0})$$

$$= F_1 + 2F_2$$

所以, (X, Y) 是 $4N_0 \times N_1$ 阶的最佳四进阵列偶 (X', Y') 是 $2N_0 \times 2N_1$ 阶的最佳四进阵列偶.

证毕

例 4 已知有 12×2 阶的几乎最佳四进阵列偶 (X_1, Y_1) , 峰值为 $F_1 = 8$ 和 6×2 阶最佳四进阵列偶 (X_2, Y_2) , 峰值为 $F_2 = 4$, 它们分别为:

$$\left(\begin{array}{l} X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} X_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ Y_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

根据定理 6 的构造方法得到 24×2 阶最佳四进阵列偶 (X, Y) 为:

$$\left(\begin{array}{l} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ Y = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

得到的 12×4 阶最佳四进制偶 (X', Y') 为:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

定理 7 如果存在二维 $2N_0 \times N_1$ 阶最佳四进制偶 (X_1, Y_1) , 且 N_0 为奇数, 峰值为 F_1 , 则存在二维的 $4N_0 \times N_1$ 阶几乎最佳四进制偶 (X, Y) .

证明 令 $P_{X_1}(x_0, x_1)$ 、 $P_{Y_1}(x_0, x_1)$ 是最佳四进制偶 (X_1, Y_1) 的特征多项式, 由于 N_0 是奇数, 可以把 $P_{X_1}(x_0, x_1)$ 、 $P_{Y_1}(x_0, x_1)$ 写成下面的形式:

$$P_{X_1}(x_0, x_1) = U_{X_2}(x_0^2, x_1) + x_0^{N_0} V_{X_3}(x_0^2, x_1)$$

$$P_{Y_1}(x_0, x_1) =$$

$$U_{Y_2}(x_0^2, x_1) + x_0^{N_0} V_{Y_3}(x_0^2, x_1) \pmod{x_0^{2N_0} - 1, x_1^{N_1} - 1}$$

其中: (X_2, Y_2) 、 (X_3, Y_3) 是阶数都为 $N_0 \times N_1$ 的阵列偶, $U_{X_2}(x_0, x_1)$ 、 $U_{Y_2}(x_0, x_1)$ 、 $V_{X_3}(x_0, x_1)$ 、 $V_{Y_3}(x_0, x_1)$ 分别是阵列偶 (X_2, Y_2) 、 (X_3, Y_3) 的特征多项式, 把它们分别定义为

$$U_{X_2}(x_0, x_1) = \sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} x_2(j_0, j_1) x_0^{j_0} x_1^{j_1}$$

$$U_{Y_2}(x_0, x_1) = \sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} y_2(j_0, j_1) x_0^{j_0} x_1^{j_1}$$

$$V_{X_3}(x_0, x_1) = \sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} x_3(j_0, j_1) x_0^{j_0} x_1^{j_1}$$

$$V_{Y_3}(x_0, x_1) = \sum_{j_0=0}^{N_0-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} y_3(j_0, j_1) x_0^{j_0} x_1^{j_1}$$

由于 (X_1, Y_1) 是峰值为 F_1 的最佳四进制偶, 则有

$$P_{X_1}(x_0, x_1) \bar{P}_{Y_1}(x_0^{-1}, x_1^{-1}) \equiv F_1 \pmod{x_0^{2N_0} - 1, x_1^{N_1} - 1}$$

则可以很容易得到

$$U_{X_2}(x_0, x_1) \bar{U}_{Y_2}(x_0^{-1}, x_1^{-1}) + V_{X_3}(x_0, x_1) \bar{V}_{Y_3}(x_0^{-1}, x_1^{-1}) \equiv F_1$$

$$U_{X_2}(x_0, x_1) \bar{V}_{Y_3}(x_0^{-1}, x_1^{-1}) + V_{X_3}(x_0, x_1) \bar{U}_{Y_2}(x_0^{-1}, x_1^{-1}) \equiv 0$$

又令

$$P_X(x_0, x_1) = (1 - x_0^{2N_0}) [U_{X_2}(x_0^4, x_1) + ix_0^{N_0} V_{X_3}(x_0^4, x_1)]$$

$$P_Y(x_0, x_1) = (1 - x_0^{2N_0}) [U_{Y_2}(x_0^4, x_1) + ix_0^{N_0} V_{Y_3}(x_0^4, x_1)]$$

在 $\pmod{x_0^{4N_0} - 1, x_1^{N_1} - 1}$ 的条件下

$$\begin{aligned} & P_X(x_0, x_1) \bar{P}_Y(x_0^{-1}, x_1^{-1}) \\ &= (1 - x_0^{2N_0}) [U_{X_2}(x_0^4, x_1) + ix_0^{N_0} V_{X_3}(x_0^4, x_1)] \\ &\quad \cdot (1 - x_0^{-2N_0}) [\bar{U}_{Y_2}(x_0^{-4}, x_1^{-1}) - ix_0^{-N_0} \bar{V}_{Y_3}(x_0^{-4}, x_1^{-1})] \\ &= 2(1 - x_0^{2N_0}) [U_{X_2}(x_0^4, x_1) \bar{U}_{Y_2}(x_0^{-4}, x_1^{-1}) \\ &\quad + V_{X_3}(x_0^4, x_1) \bar{V}_{Y_3}(x_0^{-4}, x_1^{-1}) \\ &\quad - ix_0^{-N_0} U_{X_2}(x_0^4, x_1) \bar{V}_{Y_3}(x_0^{-4}, x_1^{-1}) \\ &\quad + ix_0^{N_0} V_{X_3}(x_0^4, x_1) \bar{U}_{Y_2}(x_0^{-4}, x_1^{-1})] \\ &= 2F_1(1 - x_0^{2N_0}) \end{aligned}$$

所以, 阵列偶 (X, Y) 为 $4N_0 \times N_1$ 阶的几乎最佳四进制偶。

例 5 已知有 2×3 阶的最佳四进制偶 (X_1, Y_1) 为 $\left(X_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right)$, 根据定理 7 的方法得到的 4×3 阶的几乎最佳四进制偶为:

$$\left(X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

5 结束语

本文对最佳四进制偶的构造方法进行了研究, 提出了基于周期互补二进制偶直接构造最佳四进制偶方法、用最佳四进制阵列偶和准最佳阵列偶交替递归构造法构造最佳四进制偶和利用几乎最佳四进制偶和最佳四进制偶递归构造得到最佳四进制偶方法。这几种方法同以往人们提出的周期乘积、半周期直积、序列偶与阵列偶及阵列偶与阵列偶的折叠构造法等方法最根本的区别在于它们不是仅仅基于最佳四进制偶, 而是既基于二进制的最佳阵列偶、周期互补阵列偶、准最佳阵列偶也可以是四进制的准最佳阵列偶和几乎最佳阵列偶等, 这样就扩大了用来构造最佳四进制偶的阵列偶空间范围, 也就能得到更多的最佳四进制偶, 为工程应用提供了更大的最佳信号选择范围。

参考文献:

- [1] Calabro D, Wolf J K. On the synthesis of two dimensional arrays with desirable correlation properties[J]. IEEE Information and Control, 1968, 11(4): 530 - 560.
- [2] Markus F M, Antweiler, Leopold Bmöer, Hans-dieter Lüke. Perfect ternary arrays[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1990, 36(3): 696 - 705.
- [3] K T Arasu, Warwick de Launey. Two-dimensional perfect quaternary arrays[J]. IEEE Transaction Theory, 2001, 47(4): 1482 - 1493.

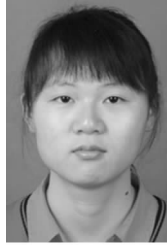
- [4] Hans-dieter Lüke. Almost-perfect quadriphase sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(6): 2607 – 2608.
- [5] Lüke H D, Busboom A. Mismatched filtering of periodic and odd-periodic binary arrays[J]. Applied Optics, 1998, 37(5): 856 – 864.
- [6] 赵晓群, 何文才, 王仲文, 等. 最佳二进阵列偶的理论研究[J]. 电子学报, 1999, 27(1): 34 – 37.
Zhao Xiao-qun, He Wen-cai, Wang Zhong-wen, et al. The theory of the perfect binary array pairs[J]. Acta Electronica Sinica, 1999, 27(1): 34 – 37. (in Chinese)
- [7] 蒋挺, 侯蓝田, 赵晓群. 最佳屏蔽二进阵列偶理论研究[J]. 电子学报, 2004, 32(2): 282 – 286.
Jiang Ting, Hou Lan-tian, Zhao Xiao-qun. The theory of perfect punctured binary array pairs [J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(2): 282 – 286. (in Chinese)
- [8] Xu Chengqian, Zhao Xiaoqun. Periodic complementary binary sequence pairs[J]. Journal of Electronics, 2002, 19(2): 152 – 159.

作者简介:



许成谦 男, 1961 年出生于陕西城固, 1997 年获北京邮电大学信号与信息处理专业博士学位, 现为燕山大学教授、博士生导师. 主要研究方向为编码理论、密码学、信号设计等.

E-mail: cqxu@ysu.edu.cn



彭秀平 女, 1984 年出生于安徽安庆, 2006 年毕业于燕山大学通信工程专业, 现为燕山大学信号与信息处理专业硕士研究生, 主要研究方向为最佳离散信号设计.

E-mail: pxp_forever@sina.com